§ 1.

Նույնության ապացուցում: Թվաբանական բնույթի խնդիրներ

Օրինակ 1. Աճման կարգով հերթականությամբ գրենք կենտ դրական թվերը 1, 3, 5, 7.... Նշանակենք առաջինը u_1, երկրորդը՝ u_2. երրորդը՝ u_3 և այլն, այսինքն.

$$u_1=1,\ u_2=3,\ u_3=5,\ u_4=7,\ \dots$$

Մեր առջև դնենք այսպիսի խնդիր՝ կազմենք բանաձև, որը u_n կենտ թիվը կարտահայտի իր n համարով:

Լուծում. Առաջին կենտ թիվը կարելի է գրել, նաև այսպես՝

$$u_1=2\cdot 1-1 \qquad (1)$$

երկրորդ՝ u_2 կենտ թիվը կարելի է գրել այսպես՝

$$u_2=2\cdot 2-1 \qquad (2)$$

երրորդ՝ u_3 կենտ թիվը կարելի է գրել այսպես՝

$$u_3=2\cdot 3-1 \qquad (3)$$

Ուշադիր դիտարկելով (1), (2), (3) հավասարությունները, կարելի է արտահայտել վարկած, որ որևէ կենտ թիվ ստանալու համար բավական է նրա համարի կրկնակիից հանել 1, այսինքն *n* կենտ թվի համար ունենք այսպիսի բանաձև

$$u_n=2\cdot n-1 \qquad (4):$$

Ապացուցենք, որ այս բանաձևը ճիշտ է

1°. Հավասարություն (1)-ը ցույց է տալիս, որ n = 1 դեպքում բանաձև (4)-ը ճիշտ է:
2^0. Ենթադրենք, որ բանաձև (4)-ը ճիշտ է $n = \kappa$ համար, այսինքն k կենտ թիվը ունի այսպիսի տեսք

$$u_k=2\cdot k-1$$

Ապացուցենք, որ բանաձև (4)-ը պարտադիր ճիշտ կլինի նաև *(k+1)* կենտ թվի համար, այսինքն *(k+1)*-րդ կենտ թիվը ունի այսպիսի տեսք

$$u_{k+1}=2(k+1)-1$$

կամ էլ, նույնն է ինչ

$$u_{k+1}=2\cdot k+1$$

(k+1)-րդ կենտ թիվը ստանալու համար բավական է k-րդ կենտ թվին 2 գումարել, այսինքն

$$u_{k+1}=u_k+2$$

Բայց, ըստ պայմանի $u_k=2k-1$, *կնշ*անակի,

$$u_{k+1}=(2k-1)+2=2k+1$$

ինչն էլ պահանջվում էր ապացուցել:

Պատասխան $u_n = 2n-1$

Օրինակ 2. Հաշվենք առաջին n հատ կենտ թվերի գումարը:

Լուծում. Նշանակենք որոնվող թիվը S_n այսինքն

$$S_n=1+3+5+7+...+(2n-1)$$

Այսպիսի խնդիրները լուծելու համար մաթեմատիկայում կան պատրաստի բանաձևեր: Մեզ հետաքրքիր է լուծել այս խնդիրը, ոչ թե պատրաստի բանաձևի դիմելով, այլ մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդի օգնությամբ: Դրա համար նախ պետք է վարկած կառուցել, այսինքն, ուղղակի փորձել գուշակել պատասխանը:

n-ին հաջորդաբար տանք արժեքներ՝ 1, 2, 3, … մինչև բավական նյութ կուտակվի, որպեսզի դրանց հիման վրա ավելի կամ պակաս հուսալի վարկած կառուցենք: Դրանից հետո կմնա ստուգել վարկածը մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով:

Ունենք

$$S_1=1,\ S_2=4,\ S_3=9,\ S_4=16,\ S_5=25,\ S_6=36$$

Հիմա արդեն ամեն ինչ կախված է խնդիրը լուծողի դիտողականությունից, նրա՝ մասնավոր արդյունքներից ընդանուրը գուշակելու կարողությունից:

Ենթադրում ենք, որ այս դեպքում հեշտ է նկատել, որ

$$S_1=1^2,\ S_2=2^2,\ S_3=3^2,\ S_4=4^2$$

Սրա հիման վրա կարելի է ենթադրել, որ ընդանրապես

$$S_n=n^2$$

Ապացուցենք, որ վարկածը ճիշտ է:

1^0. n = 1 դեպքում գումարը ներկայացվում է մի գումարելիով, որը հավասար է 1-ի: n^2 արտահայտությունը n = 1 դեպքում նույնպես հավասար է 1-ի: Նշանակում է, որ n = 1 դեպքում վարկածը ճիշտ է:

2^0. Դիցուք, վարկածը ճիշտ է n=k համար, այսինքն $S_k = к^2$: Ապացուցենք, որ այդ դեպքում վարկածը ճիշտ կլինի n=k+1-ի համար, ասինքն.

$$S_{k+1}=(k+1)^2:$$

Իրոք՝

$$S_{k+1}=S_k+(2k+1):$$

Բայց $S_k = к^2$ և դրա համար էլ

$$S_{k+1}=k^2+(2k+1)=(k+1)^2$$

ինչն էլ պահանջվում էր ապացուցել:

Պատասխան. $S_n=n^2$.

Խնդիր 1. Գտնել u_n*-ը,* եթե հայտնի է, որ u_1 = 1 և որ բոլոր բնականի $k > 1$դեպքում

$$u_k=u_{k-1}+3:$$

Ցուցում. $u_1 = 3 \cdot 1 - 2$, $u_2 = 3 \cdot 2 - 2$:

Խնդիր 2. Գտնել գումարը

$$S_n=1+2+2^2+2^3+2^4+...+2^{n-1}$$

Ցուցում. $S_1 = 2 - 1$. $S_2 = 2^2 - 1$, $S_3 = 2^3 - 1$:

Օրինակ 3. Ապացուցել, որ բնական շարքի առաջին n թվերի գումարը հավասար է $\frac{n(n+1)}{2}$:

Լուծում. Այս խնդիրը տարբերվում է նախորդից նրանով, որ վարկած այստեղ ստեղծել պետք չէ, այն տրված է: Պետք է միայն ապացուցել, որ վարկածը ճիշտ է:
Որոնվող գումարը նշանակենք S_n, այսինքն

$$S_n=1+2+3+4+...+n:$$

1^0. n = 1 դեպքում վարկածը ճիշտ է:
2^0*.* Դիցուք՝

$$S_k=1+2+3+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}:$$

Ցույց տանք, որ

$$S_{k+1}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}:$$

Իրականում.

$$S_{k+1}=S_k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}:$$

Խնդիրը լուծված է:

Օրինակ 4. Ապացուցել, որ բնական շարքի առաջին n թվերի քառակուսիների գումարը հավասար է $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$:

Լ ու ծ ու մ . Դիցուք. $S_2(n)=1^2+2^2+3^2+\ldots n^2$.

1^0. $S_2(1)=1^2=\frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot 1+1)}{6}$:

2^0. Ենթադրենք, որ

$$S_2(n)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}:$$

Այդ դեպքում

$$S_2(n+1)=1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2,$$

և վերջապես

$$S_2(n+1)=\frac{(n+1)\big((n+1)+1\big)\big(2(n+1)+1\big)}{6}:$$

Օրինակ 5. Ապացուցել, որ

$$S_n=1-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}:$$

Լուծում.

1^0. n = 1 դեպքում վարկածը, ակնհայտորեն, ճիշտ է ($(-1)^0=1$)

2^0. Թող՝

$$S_k=1-2^2+3^2+\ldots+(-1)^{k-1}k^2=(-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2}:$$

Իրոք՝

$$S_{k+1}=S_k+(-1)^k(k+1)^2=(-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2}+(-1)^k(k+1)^2=$$

$$=(-1)^k\left((k+1)-\frac{k}{2}\right)(k+1)=(-1)^k\frac{(k+1)(k+2)}{2}:$$

Խնդիր 3. Ապացուցել, որ

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}:$$

Խնդիր 4. Ապացուցել, որ բնական շարքի առաջին n թվերի խորանարդների գումարը հավասար է $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$:

Խնդիր 5. Ապացուցել, որ

$$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\ \ (x\neq 1):$$

Օրինակ 6. Ապացուցել, որ

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+(n-1)n=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}:$$

Լուծում 1^0. $1\cdot 2=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3}$:

2°. Եթե

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+(n-1)n=\frac{(n-1)n(n+1)}{3},$$

Ուրեմն

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+(n-1)n+n(n+1)=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}:$$

Օրինակ 6-ը կարելի է դուրս բերել նաև օրինակ 3-ի և 4-ի արդյունքներից, եթե նկատենք, որ

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+(n-1)n=1\cdot(1+1)+2\cdot(2+1)+3\cdot(3+1)+\cdots+(n-1)\big((n-1)+1\big)=\ (1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2)+\big(1+2+3+4+\cdots+(n-1)\big):$$

Խնդիր 6. Ապացուցել, որ

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\cdots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}:$$

Խնդիր 7. Ապացուցել, որ

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}:$$

Խնդիր 8. Ապացուցել, որ

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}:$$

Խնդիր 9. Ապացուցել, որ

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}:$$

Խնդիր 10. Ապացուցել, որ

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\cdots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{1}{4n+1}:$$

Խնդիր 11. Ապացուցել, որ

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\cdots+\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}=\frac{n}{a(a+n)}:$$

Օրինակ 7. Ապացուցել, որ եթե $v_0=2$, $v_1=3$ և ցանկացած բնական k-ի դեպքում տեղ ունի $v_{k+1}=3v_k-2v_{k-1}$ հարաբերակցությունը, ուրեմն $v_n=2^n+1$:

Լուծում 1°. n=0 и n = 1 դեպքում, ըստ պայմանի, պնդումը ճիշտ է:

2°. Ենթադրենք, որ

$$v_{k-1}=2^{k-1}+1,\ v_k=2^k+1\ :$$

Այդ դեպքում

$$v_{k+1}=3(2^k+1)-2(2^{k-1}+1)=2^{k+1}+1:$$

Խնդիր 12. Ապացուցել, որ եթե

$$u_1=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta},u_2=\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}\quad(\alpha\neq\beta)$$

և ցանկացած բնական $\kappa>2$ տեղի ունի հարաբերակցություն

$$u_k=(\alpha+\beta)u_{k-1}-\alpha\beta u_{k-2},$$

ուրեմն

$$u_n=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}:$$

Օրինակ 8. $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ արտադրյալը նշանակվում է n! և կարդացվում է « էն ֆակտորիալ»:

Հաշվել

$$S_n = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \cdots + n\cdot n!\ :$$

Լուծում.

$$S_1 = 1\cdot 1! = 1, S_2 = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! = 5$$

$$S_3 = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! = 23$$

$$S_4 = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + 4\cdot 4! = 119\ :$$

Դիտարկելով այս արդյունքները, կարելի է նկատել, որ

$$S_1 = 2! - 1, S_2 = 3! - 1, S_3 = 4! - 1, S_4 = 5! - 1:$$

Սա տալիս է վարկած արտահայտելու հնարավորություն, որ

$$S_n = (n+1)! - 1\ :$$

Ստուգենք այդ վարկածը:

1^0. n = 1 համար վարկածը ճիշտ է, քանի որ

$$S_1 = 1\cdot 1! = 2! - 1\ :$$

2°. Թող լինի

$$S_k = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \cdots + k\cdot k! = (k+1)! - 1\ :$$

Ցույց տանք, որ

$$S_{k+1} = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \cdots + k\cdot k! + (k+1)(k+1)! = (k+2)! - 1\ :$$

Իրոք.

$$S_{k+1} = S_k + (k+1)(k+1)! = \big((k+1)! - 1\big) + (k+1)(k+1)! = \big((k+1)!\,(k+1+1)\big) - 1 = (k+1)!\,(k+2) - 1 = (k+2)! - 1\ :$$

Խնդիր 13. Ապացուցել նույնությունը

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \cdots + \frac{2^n}{1+2^{2^n}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}:$$

Օրինակ 9. Տրված է՝

$\alpha + \beta = m, \alpha\beta = a\ , A_2 = m - \frac{a}{m-1}\, , A_3 = m - \frac{a}{m - \frac{a}{m-1}}, A_4 = m - \frac{a}{m - \frac{a}{m - \frac{a}{m-1}}}$ և այլն, այսինքն k>1 դեպքում

$A_{k+1} = m - \frac{a}{A_k}$, $(m \neq 1,\ \alpha \neq \beta)$:

Ապացուցել, որ

$$A_n = \frac{(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})-(\alpha^n-\beta^n)}{(\alpha^n-\beta^n)-(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})} \qquad (1):$$

Լուծում: Սկզբում ապացուցենք, որ բանաձևը (1) ճիշտ է n = 2 համար:

1⁰. Ըստ պայմանի.

$$A_2 = m - \frac{a}{m-1} = (\alpha+\beta) - \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)-1} = \frac{\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta-\alpha-\beta}{\alpha+\beta-1}:$$

Ըստ բանաձևի (1)-ի

$$A_2 = \frac{(\alpha^3-\beta^3)-(\alpha^2-\beta^2)}{(\alpha^2-\beta^2)-(\alpha-\beta)}:$$

Կոտորակը կրճատելով $(\alpha-\beta)$ −ով, կունենանք

$$A_2 = \frac{\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta-\alpha-\beta}{\alpha+\beta-1}:$$

Ինչը որ պետք էր ապացուցել:

2⁰. Թող բանաձևը (1) ճիշտ լինի n=k համար, այսինքն

$$A_k = \frac{(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})-(\alpha^k-\beta^k)}{(\alpha^k-\beta^k)-(\alpha^{k-1}-\beta^{k-1})}: \qquad (2)$$

Ապացուցենք, որ այդ դեպքում այն ճիշտ կլինի նաև n=k+1 համար, այսինքն

$$A_{k+1} = \frac{(\alpha^{k+2}-\beta^{k+2})-(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})}{(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})-(\alpha^k-\beta^k)}:$$

Իրոք՝

$$A_{k+1} = m - \frac{a}{A_k} \text{ կամ } A_{k+1} = (\alpha+\beta) - \frac{\alpha\beta}{A_k}$$

Օգտվելով (2) հավասարությունից, կունենանք

$$A_{k+1} = (\alpha+\beta) - \frac{\alpha\beta\left((\alpha^k-\beta^k)-(\alpha^{k-1}-\beta^{k-1})\right)}{(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})-(\alpha^k-\beta^k)} = \frac{(\alpha^{k+2}-\beta^{k+2})-(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})}{(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})-(\alpha^k-\beta^k)}:$$

Թեորեմը ապացուցված է:

Խնդիր 14. Պարզեցնել բազմանդամը

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}-\cdots+(-1)^n\frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}:$$

Պատասխան՝

$$(-1)^n\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{n!}:$$

Օրինակ 10. Ապացուցել, որ 7-ից մեծ յուրաքանչյուր ամբողջ թիվ ռուբլին կարելի է առանց մնացորդի վճարել 3 և 5 ռուբլի արժողությամբ թղթադրամներով:

Լուծում. 1°. 8 ռուբլիի համար պնդումը ճիշտ է (քանի որ 8 ռուբ. = 3 ռուբ. + 5 ռուբ.):

2^0. Թող պնդումը ճիշտ լինի κ ռուբլու համար, որտեղ κ-ն ամբողջ թիվ է, որը մեծ է 8-ից: Երկու դեպք է հնարավոր՝ 1) κ ռուբլին վճարվում է միայն երեք ռուբլիանոց թղթադրամներով և 2) κ ռուբլին վճարվում է թղթադրամներով, որոնց մեջ կա գոնե մեկ 5 ռուբլիանոց:

Առաջին դեպքում երեք ռուբլիանոցների քանակը երեքից քիչ պիտի չլինի, քանի որ այս դեպքում $\kappa > 8$: Որպեսզի վճարենք $\kappa+1$ ռուբլին, փոխանակենք երեք հատ երեք ռուբլիանոցները երկու հինգ ռուբլիանոցներով: Երկրորդ դեպքում $\kappa+1$ ռուբլի վճարելու համար փոխանակենք մեկ 5 ռուբլիանոցը երկու հատ 3 ռուբլիանոցով:

Օրինակ 11. Ապացուցել, որ երեք հաջորդական բնական թվերի խորանարդների գումարը բաժանվում է 9-ի:

Լուծում. 1^0. $1^3+2^3+3^3$ գումարը բաժանվում է 9-ի: Նշանակում է, որ պնդումը ճիշտ է, երբ երեք հաջորդական բնական թվերի առաջինը թիվը 1-ն է:

2^0. Թող $k^3+(k+1)^3+(k+2)^3$ գումարը, որտեղ κ — ինչ-որ բնական թիվ է, բաժանվում է 9-ի: Գումար 2^0

$(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3=(k+1)^3+(k+2)^3+k^3+9k^2+27k+27=(k^3+(k+1)^3+(k+2)^3)+9(k^2+3k+3)$

երկու գումարելիների գումար է, որոնցից յուրաքանչյուրը բաժանվում է 9-ի, հետևաբար ինքն էլ կբաժանվի 9-ի:

Խնդիր 15. Ապացուցել, որ ամբողջ $n \geq 0$ դեպքում

$$A_n = 11^{n+2}+12^{2n+1}$$

բաժանվում է 133-ի:

Օրինակ 12. 1.   2. ..... 2n թվերից կամայականորեն ընտրեցին n+1 հատ թիվ: Ապացուցել, որ ընտրված թվերի մեջ գոնե երկու թիվ կգտնվեն, որոնցից մեկը առանց մնացորդի կբաժանվի մյուսին:

Լուծում. 1^0. 1, 2 թվերի համար պնդումը ճիշտ է: Ենթադրենք, որ 2n թվերից՝ 1, 2...2n, որտեղ n >2, հաջողվեց այնպես ընտրել n+1 թիվ, որ նրանցից մեկը չի բաժանվում մյուսին: Կարճության համար այս բոլոր թվերի ամբողջությունը նշանակենք M_{n+1}: Ապացուցենք, որ այդ դեպքում մեջ 1, 2, 3…2n-2 թվերից կարելի է ընտրել այնպիսի n հատ թիվ, որ նորից նրանցից ոչ մեկը չբաժանվի մյուսին:

Հնարավոր է չորս դեպք՝

1) M_{n+1} չի պարունակում ո՛չ 2n-1-ը, ո՛չ 2n-ը:
2) M_{n+1} պարունակում է 2n-1-ը և չի պարունակում 2n-ը:
3) M_{n+1} պարունակում է 2n-ը և չի պարունակում 2n-1-ը
4) M_{n+1} պարունակում է և՛ 2n-1-ը, և՛ 2n-ը:

Դեպք 1. M_{n+1}-ից ինչ-որ թիվ հեռացնենք: Կմնա n թիվ, որոնցից յուրաքանչյուրը մեծ չէ 2n-2-ից: Այդ թվերից ոչ մեկը մյուսին չի բաժանվում:

Դեպք 2. M_{n+1}-ից հեռացնենք 2n-1 թիվը: Կմնա n թիվ, որոնցից ամեն մեկը մեծ չէ, 2n-2-ից: Այս n թվերից ոչ մեկը չի բաժանվում մյուսին:

Դեպք 3. M_{n+1}-ից հեռացնենք 2n թիվը և նորից կստանանք նույն արդյունքը:

Դեպք 4. Սկզբում նկատենք, որ M_{n+1} չի պարունակում n թիվը, քանի որ M_{n+1} մեջ կգտնվեր երկու թիվ (2n և n), որոնցից մեկը մյուսին բաժանվում էր: M_{n+1}-ից հեռացնենք 2n - 1 և 2n թվերը: Մնացած n-1 թվերի ամբողջությունը նշանակենք M_{n-1}: Կստանանք n թվեր, որոնցից ամեն մեկը չի գերազանցում 2n-2-ը: Մնում է ցույց տալ, որ այդ n թվերից ոչ մեկ չի բաժանվում մյուսին: M_{n+1} –ում չկա երկու թիվ, որոնցից մեկը բաժանվի մյուսին: Նշանակում է, որ նաև M_{n-1} մեջ չի եղել: Մնում է համոզվել, որ այդպիսի թվեր չեն լինի նաև այն ժամանակ, երբ M_{n-1}-ին միացնենք n թիվը:

Դրա համար բավական է համոզվել, որ՝ 1) ոչ մի թիվ, որը մտնում է M_{n-1} մեջ չի բաժանվում n-ի և 2) n թիվը չի բաժանվում ոչ մի թվի, որը կա M_{n-1} -ում: Առաջինը բխում է նրանից, որ M_{n-1} –ի մեջ մտնող բոլոր թվերը չեն գերազանցում 2n-2-ը: Երկրորդը բխում է նրանից, որ 2n թիվը չի բաժանվում ոչ մի թվի, որը մտնում է M_{n-1}-ի մեջ:
Այսպիսով, եթե համարենք, որ պնդումը ճիշտ չէ 2n թվի դեպքում՝ 1, 2,…, 2n, ուրեմն այն սխալ է նաև 2(n-1) թվի դեպքում՝ 2, …, 2n-2: Կնշանակի, որ եթե պնդումը ճիշտ է

$2n-1$ հատ՝ 1, 2, 3, ...$2n-2$ թվերի համար, ուրեմն այն ճիշտ է $2n$ հատ՝ 1, 2, …, $2n$ թվերի համար:
Այստեղից և 1^0 կետից հետևում է, որ մեր պնդումը ճիշտ է $2n$ հատ՝ 1, 2,…, $2n$, թվերի համար, որտեղ n – ցանկացած բնական թիվ է:
Նկատենք, որ այս խնդիրը ունի հետևյալ պարզ լուծումը: Ընտրենք 1, 2, …, $2n$ թվերից կամայական $n+1$ հատ թիվը: Այս թվերի ամբողջությունը նշանակենք M_{n+1}: M_{n+1}-ի մեջ մտնող յուրաքանչյուր զույգ թիվ բաժանենք երկուսի այնպիսի աստիճանի, որ քանորդը կենտ թիվ լինի: Այս քանորդների և M_{n+1} մեջ եղած կենտ թվերի ամբողջությունը նշանակում M'_{n+1} : M'_{n+1}-ը պարունակում է $n+1$ կենտ թիվը, որոնցից ամեն մեկը փոքր է $2n$-ից:
Քանի որ $2n$-ից փոքր բոլոր բնական թվերի մեջ միայն n հատ կենտ թիվ կա, ուրեմն M'_{n+1} պարունակում գոնե երկու հավասար թվեր: Այդ թվերից յուրաքանչյուրը թող հավասար լինի k:
Ստացված արդյունքը նշանակում է, որ M'_{n+1}-ում կան $2^s k$ և $2^t k$ թվերը (որտեղ s և t թվերից մեկը կարող է հավասարվել զրոյի): Բայց $2^s k$ և $2^t k$ թվերից մեկը բաժանվում է մյուսին:
Խնդիր 16. Ապացուցել, որ հարթության մեջ մի կետով անցնող n տարբեր ուղիղները հարթությունը բաժանում են $2n$ մասի:
Օրինակ 13. Ապացուցել, որ n հարթությունները, որոնք անցնում են մի կետով այնպես, որ ոչ մի երեքը մեկ ուղղով չեն անցնում, տարածությունը բաժանում են $A_n=n(n-1)+2$ մասի:
Լուծում. 1°. Մի հարթությունը բաժանում է տարածությունը երկու մասի, և $A_1=2$: $n=1$ համար պնդումը ճիշտ է:

2°. Ենթադրենք, որ $n=k$ պնդումը ճիշտ է, այսինքն k հարթությունը բաժանում է տարածությունը $k(k-1)+2$ մասերի: Ապացուցենք, որ այդ դեպքում $k+1$ հարթությունը տարածությունը բաժանում է $k(k+1)+2$ մասի:

Իրոք, թող P-ն լինի $(k+1)$-րդ հարթություն: Առաջին k հարթություններից յուրաքանչյուրի հետ P հարթությունը հատվում է որևէ ուղղով և, այսպիսով, P հարթությունը տրոհվում է մասերի՝ մեկ կետով անցնող k տարբեր ուղիղներով:
Խնդիր 16-ի հիման վրա կարող ենք պնդել, որ P հարթությունը բաժանված է $2k$ մասի, որոնցից յուրաքանչյուրը այդ կետը որպես գագաթ ունեցող հարթ անկյուն է:

Առաջին k հարթությունները տարածությունը տրոհում են մի քանի բազմանիստ անկյունների: Այս բազմանիստ անկյուններից մի քանիսը P հարթությունով բաժանվում են երկու մասի:

Այս երկու մասերի ընդանուր նիստը հարթության մասն է, որը սահմանափակվում է երկու ճառագայթով, որոնցով P-ն հատվում է տվյալ բազմանիստ անկյան նիստերի հետ, այսինքն 2k հարթ անկյուններից մեկը, որոնց բաժանվում է P հարթությունը:

Սա նշանակում է, որ բազմանիստ անկյունների թիվը, որոնք P հարթությամբ բաժանվում են երկու մասի, չի կարող լինել ավելի մեծ, քան 2к:

Մյուս կողմից, 2k մասերից յուրաքանչյուրը, որոնց տրոհվում է P հարթությունը առաջին k հարթությունների հետ հատվելիս, երկու բազմանիստ անկյունների ընդհանուր նիստն է և այդպիսով առաջին k հարթություններով կազմված երկնիստ անկյունը տրոհում է երկու մասի:

Սա նշանակում է, որ բազմանիստ անկյունների քանակը, որոնք P հարթությամբ տրոհվում են երկու մասի, չի կարող լինել ավելի փոքր քան 2k:

Այսպիսով, P հարթությունը տարածության՝ առաջին k հարթություններով տրոհված մասերից ճիշտ 2k հատը տրոհում է երկու մասի:

Այդ պատճառով, եթե k հարթությունը տարածությունը տրոհում է k(k-1)+2 մասի, k+1 հարթությունը կբաժանի

$$(k(k-1)+2)+2k=k(k+1)+2$$

մասի:

Պնդումը ապացուցված է: